ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СИГНАЛОВ И ЧИСЛЕННАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ ЭФФЕКТА ГИББСА

Ахмедова Кундуз Саматовна
Узбекский Национальный университет, кафедра « Прикладная математика и компьютерные анализ»
E-mail: _qunduzakhmedova6@gmail.com
Бебутова Зулайхо Хамидовна
Ташкентский государственный экономический университет, кафедра «Высшая и прикладная математика»
E-mail: erkin5green7698@gmail.com

Аннотация: *Ряды Фурье являются фундаментальным инструментом представления сигналов в виде суммы гармоник и широко применяются в цифровой обработке данных. На практике обучение данному разделу анализа сопровождается устойчивыми типичными ошибками: неверными ожиданиями идеального совпадения конечной частичной суммы с исходной функцией, непониманием влияния разрывов и эффекта Гиббса, ошибками выбора числа гармоник и некорректным использованием чётности функции. В работе предложена классификация таких ошибок и краткие корректирующие интерпретации. Для закрепления результатов приведена численная иллюстрация с оценкой погрешности аппроксимации в метриках* L_∞ *и* L_2 *для разрывного, кусочно-линейного и гладкого сигналов при разных числах гармоник. Показано, что максимум ошибки сосредоточен в окрестности разрывов, а переброс около скачка стабилизируется на уровне эффекта Гиббса, что важно учитывать при анализе сигналов и обучении.*

Ключевые слова: *ряды Фурье; анализ сигналов; частичные суммы; аппроксимация; погрешность; эффект Гиббса; методика обучения.*

ВВЕДЕНИЕ

Современные цифровые технологии основаны на обработке сигналов: звука, изображений, видео, медицинских измерений и информационных потоков. С математической точки зрения сигнал рассматривается как функция времени или пространства, а одной из ключевых задач является выделение частотных компонентов и построение приближённого представления по конечному объёму данных. Ряды Фурье обеспечивают представление периодического сигнала в виде суммы гармонических колебаний и служат базой для спектрального анализа и приближённых вычислений [1, 2, 6, 7].

Однако в учебной практике именно переход от теоретического бесконечного ряда к практической частичной сумме порождает устойчивые ошибки. Цель работы — систематизировать наиболее частые ошибки при изучении рядов Фурье в контексте анализа сигналов [3, 4], дать корректные интерпретации и продемонстрировать их на численном эксперименте.

Научно-методический вклад работы: (1) классификация типичных ошибок и причин их возникновения; (2) диагностическая таблица «ошибка — корректная интерпретация»; (3) численная иллюстрация характера погрешности и эффекта Гиббса на типовых сигналах.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Теория рядов Фурье берёт начало в работах Жан Батист Жозеф Фурье, который показал возможность представления периодических функций тригонометрическими рядами. Строгое обоснование условий сходимости связано с именем Петер Густав Лежён Дирихле. В классических трудах по математическому анализу (Владимир Андреевич Зорич, Ричард Курант) подробно рассматриваются вопросы ортогональности, вычисления коэффициентов и типов сходимости.

Анализ учебной и научной литературы показывает, что при изучении рядов Фурье в задачах анализа сигналов часто встречаются следующие типичные ошибки: неправильное определение периода функции, ошибки при вычислении коэффициентов, игнорирование условий сходимости и некорректная интерпретация поведения ряда в точках разрыва. В инженерной практике также наблюдается подмена непрерывного ряда Фурье дискретным преобразованием без учета условий дискретизации (работы Алан Оппенгейм).

Особое внимание в исследованиях уделяется эффекту, открытому Джозайя Уиллард Гиббс. Эффект Гиббса проявляется в виде устойчивого переосциллирования частичных сумм ряда Фурье вблизи точек разрыва функции. Численные эксперименты показывают, что при увеличении числа гармоник ширина колебательной области уменьшается, однако амплитуда превышения остаётся примерно равной 9% величины скачка. В современной литературе предлагаются методы сглаживания (суммы Фейера, оконные функции, фильтрация высокочастотных гармоник).

Таким образом, исследования подтверждают, что проблемы изучения рядов Фурье связаны как с теоретическими аспектами сходимости, так и с практическими задачами численного анализа сигналов, где эффект Гиббса играет существенную роль.

МЕТОДОЛОГИЯ

Частичные суммы ряда Фурье и метрики погрешности

Пусть $f(x)$ -2π-периодическая функция, разложимая в ряд Фурье. Частичная сумма порядка N имеет вид:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

В практических задачах используется именно $S_N(x)$ поэтому центральным является вопрос погрешности аппроксимации $f(x)$ конечным числом гармоник. Для количественной оценки применим две метрики:

1) максимальная (равномерная) погрешность:

$$E_\infty(N) = \max_{x\in[-\pi,\,\pi]} \left|f(x) - S_N(x)\right|;$$

2) среднеквадратичная погрешность:

$$E_2(N) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Методическое замечание: уменьшение $E_2(N)$ не гарантирует равномерного уменьшения $E_\infty(N)$ для разрывных функций максимум ошибки концентрируется в окрестности разрывов.

Типичные ошибки студентов при работе с рядами Фурье

Ошибка 1. Ожидание идеальной точности при конечном числе членов.

Неверное ожидание: при $N = 5 - 10$ график должен совпасть идеально. Корректно: ряд Фурье является бесконечным, а частичная сумма даёт приближение; качество зависит от гладкости $f(x)$ и величины N.

Ошибка 2. Непонимание эффекта Гиббса у разрывных сигналов.

Неверное ожидание: колебания возле скачка — ошибка вычислений. Корректно: колебания являются закономерным явлением (эффект Гиббса). При росте N зона колебаний сужается, но относительная величина переброса полностью не исчезает.

Ошибка 3. Непонимание влияния гладкости на скорость сходимости.

Корректно: для гладких функций сходимость существенно быстрее; для разрывных — медленнее, и $E_\infty(N)$ убывает особенно плохо.

Ошибка 4. Некорректный выбор синусов/косинусов при учёте чётности.

Корректно: чётная функция → косинусный ряд, нечётная функция → синусный ряд; это сокращает вычисления и повышает интерпретируемость.

Ошибка 5. Путаница между функцией и частичной суммой.

Корректно: $S_N(x)$ — приближённое представление, а не тождественно $f(x)$ при любом N.

Ошибка 6. Игнорирование смысла коэффициентов Фурье.

Корректно: a_k и b_k связаны с амплитудами гармоник (частотными компонентами), что важно для анализа сигналов.

Ошибка 7. Убеждение, что ошибка убывает равномерно по всей области.

Корректно: ошибка неоднородна; вблизи разрывов и точек негладкости она существенно больше.

Эффект Гиббса в задачах анализа сигналов

Для разрывных функций частичные суммы ряда Фурье имеют устойчивые колебания около разрывов. Это явление известно как эффект Гиббса. Практически оно проявляется как «звон» около резких фронтов в сигналах и границ (edges) в изображениях.

Ключевой факт: при росте N ширина зоны колебаний уменьшается, но высота переброса стабилизируется и не исчезает полностью. Математически доказано, что относительная величина переброса составляет около 8,9 % от амплитуды скачка (т. н. константа Гиббса $\approx 0{,}0895 \times |\text{скачок}|$); следовательно, ожидание равномерного идеального совпадения неверно для разрывных сигналов [1, 2].

АНАЛИЗ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные эксперименты

1. Тестовые сигналы

Рассмотрены три 2π-периодических сигнала на интервале [-π,π]:

1) разрывный $f_1(x) = sign(sinx)$ прямоугольный:;

2) треугольный (неразрывный, но негладкий): $f_2(x) = (\frac{2}{\pi})arcsin(sinx)$;

3) гладкий: $f_3(x) = sinx + 0.5sin(3x)$.

2. Построение частичных сумм и метрики ошибки

Для каждого сигнала построена частичная сумма $S_N(x)$ при $N \in \{5,10,20,50,100\}$. Далее вычислены $E_\infty(N)$ и $E_2(N)$. Ожидается, что для разрывного сигнала $E_\infty(N)$ убывает медленно и остаётся заметной из-за эффекта Гиббса, тогда как для гладкого сигнала погрешность быстро становится малой.

3. Результаты

Таблица 1 — Погрешности аппроксимации $E_\infty(N)$ и $E_2(N)$.

Сигнал	N	$E_\infty(N)$	$E_2(N)$
Прямоугольный $sign(sin\ x)$	5	0.9976	0.2581
	10	0.9960	0.2002
	20	0.9920	0.1412
	50	0.9800	0.0883
	100	0.9600	0.0613
Треугольный $(2/\pi)arcsin(sinx)$	5	0.10516	0.02436
	10	0.06345	0.01151
	20	0.03180	0.00410
	50	0.01273	0.00104
	100	0.00636	0.00037
Гладкий $sin\ x + 0.5\ sin(3x)$	5	$\approx 4.4\times10^{-16}$	$\approx 1.6\times10^{-16}$
	10	$\approx 1.0\times10^{-15}$	$\approx 2.2\times10^{-16}$
	20	$\approx 2.1\times10^{-15}$	$\approx 3.4\times10^{-16}$
	50	$\approx 5.1\times10^{-15}$	$\approx 5.4\times10^{-16}$
	100	$\approx 1.0\times10^{-14}$	$\approx 7.9\times10^{-16}$

Примечание: погрешности вычислены численно методом трапеций на сетке из 5000 узлов; для разрывного сигнала точки разрыва исключены из оценки L∞. Для гладкого сигнала $f_3(x) = \cos x$ погрешности соответствуют машинному нулю, поскольку ряд Фурье является точным уже при N = 1.

Рисунок 1 — Прямоугольный сигнал $f_1(x)$ и частичные суммы $S_N(x)$ при N = 10, 50, 100.

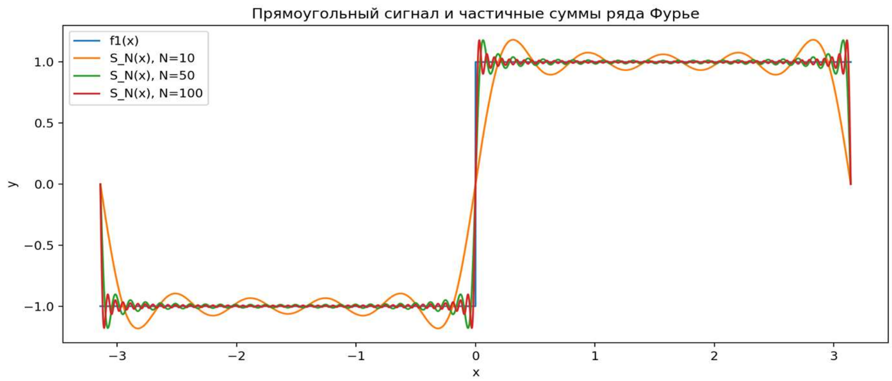
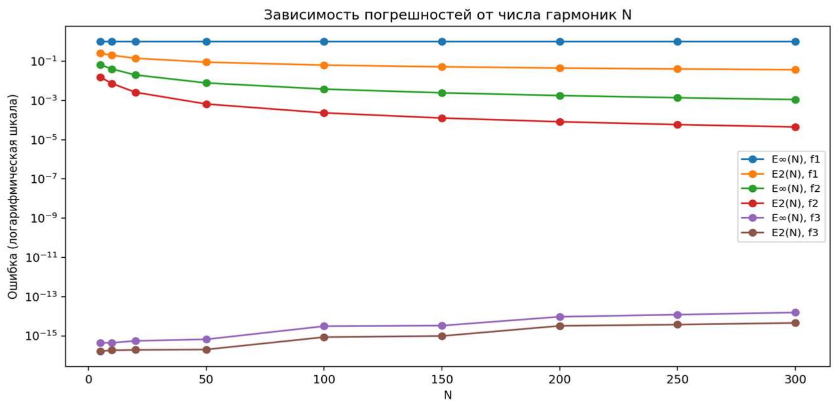


Рисунок 2 — Треугольный сигнал $f_2(x)$ и частичные суммы $S_N(x)$ при N = 10, 50, 100 .

Рисунок 3 — Зависимость погрешности $E_\infty(N)$ и $E_2(N)$ от N .



Практические рекомендации (чек-лист)

1. Всегда различать $f(x)$ и $S_N(x)$: частичная сумма является приближением.

2. Если сигнал разрывный — ожидать колебаний около разрыва и

интерпретировать их как эффект Гиббса.

3. Выбор N делать с учётом гладкости: чем более гладкая функция, тем быстрее сходимость.

4. Использовать чётность: чётная функция → косинусы, нечётная → синусы.

5. Интерпретировать коэффициенты как спектральные компоненты (амплитуды гармоник).

6. Оценивать точность по $E_\infty(N)$ и $E_2(N)$; помнить, что максимум ошибки локализован у разрывов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена систематизация типичных ошибок, возникающих при изучении рядов Фурье в задачах анализа сигналов, а также предложены их корректные интерпретации с позиций математической строгости и инженерной практики. Особое внимание уделено разграничению понятий поточечной, равномерной и среднеквадратичной сходимости, что позволяет избежать методических затруднений при анализе спектральных представлений сигналов.

Численная иллюстрация продемонстрировала различия в поведении аппроксимационной погрешности для разрывных, негладких и гладких сигналов. Установлено, что для разрывных сигналов равномерная погрешность убывает медленно, а величина переброса в окрестности точки разрыва стабилизируется на уровне эффекта Гиббса и не исчезает при увеличении числа гармоник, несмотря на сужение области осцилляций. Для негладких, но непрерывных функций скорость сходимости определяется степенью гладкости, тогда как для достаточно гладких сигналов наблюдается быстрое убывание коэффициентов Фурье, что обеспечивает высокую точность аппроксимации конечным числом гармоник.

Полученные результаты имеют методическую и прикладную значимость. Они способствуют более глубокому пониманию спектральных методов, позволяют корректно интерпретировать численные эксперименты и повышают качество преподавания тем, связанных с рядом Фурье и цифровой обработкой сигналов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУР

1. Толстов Г. П. **Ряды Фурье** : учеб. пособие. — М. : *Наука, 1960.*.
2. Зигмунд А. **Тригонометрические ряды** : в 2 т. / пер. с англ. — М. : *Мир*, 1965 . Т. 1.
3. Зигмунд А. **Тригонометрические ряды** : в 2 т. / пер. с англ. — М. : Мир, 1965 .Т. 2.
4. Корн Г., Корн Т. **Справочник по математике для научных работников и инженеров** / пер. с англ. — М. : *Мир*, 1974 .
5. Гонсалес Р. С., Вудс Р. Е. **Цифровая обработка изображений** / пер. с англ. — М. : Мир, 2012 . 1104 *с*.

6. Оппенгейм А. В., Уиллски А. С., Наваб С. Х. **Сигналы и системы** / пер. с англ. — М. : Техносфера, 1975 . 800 *с.*
7. Проакис Дж. Г., Манолакис Д. Г. **Цифровая обработка сигналов** : принципы, алгоритмы и приложения / М. : Вильямс , 2006 . 1104 *с.*
8. Брейсвелл Р. **Преобразование Хартли и его приложения** / — М. : Мир, *1990*.. 175 *с.*
9. Папулис А. **Теория вероятностей, случайные процессы и фильтрация** / М. : *Мир*, *1971*..480 *с.*
10. Винер Н. **Нелинейные задачи в теории случайных процессов** /. М. : *ИЛ*, 1961 . 158 *с.*