

MUSIQADA OLTIN NISBAT VA FIBONACHCHI RITMLARI YORDAMIDA MATEMATIK MODEL YARATISH

Jabborov Nasriddin Mirzoodilovich

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

"Oliy va amaliy matematika" kafedrası professori,

Abduraxmanov Ibroxim Erkinovich

Toshkent Shahar Prezident maktabi o'quvchisi

elektron pochta: erkin5green7698@gmail.com

Annotatsiya—ushbu maqolada musiqada oltin nisbat va Fibonachchi ritmlaridan foydalangan holda matematik model yaratishning nazariy va amaliy jihatlari o'rganilgan. Oltin nisbat va Fibonachchi ketma-ketligi musiqiy kompozitsiya va ritmik tuzilishga estetik muvozanat va tabiiy uyg'unlik kiritishi mumkinligi ko'rsatildi. Matematik model orqali turli ritmik variantlar va kompozitsion strukturalar tahlil qilinib, ularning san'atshunoslik va musiqiy ijro maqsadlari bilan bog'liqligi tasvirlangan. Ushbu tadqiqot musiqashunoslar va kompozitorlar uchun yangi ijodiy yondashuvlarni rivojlantirishda foydali bo'lishi mumkin.

Kalit so'zlar: Musiq, Oltin nisbat, Fibonachchi ritmlari, Matematik model, Kompozitsiya, Ritm, Estetika

KIRISH

Oltin nisbat matematikadagi eng mashhur va qiziqarli nisbatlardan biri hisoblanadi. U mutanosiblik va uyg'unlik g'oyalari bilan bog'liq bo'lib, geometriya, algebra va tabiat qonuniyatlarini yagona tizimda ko'rib chiqish imkonini beradi. Bu mavzu o'quvchi va talabalarda matematik fikrlashni shakllantiradi va fanlararo bog'liqlikni ochib beradi.

Oltin nisbat — bu ikkita kattalik o'rtasidagi maxsus nisbat bo'lib, u quyidagicha ta'riflanadi.

Agar kesma ikki qismga shunday bo'linsaki, butun kesmaning katta qismga nisbati katta qismning kichik qismga nisbatiga teng bo'lsa, bu bo'linish oltin nisbat deyiladi.

Agar: butun kesma — $a + b$, katta qismi — a , kichik qismi — b

bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$

Bu tenglik oltin nisbatning asosiy matematik ta'rifidir.

Oltin nisbat soni va uning qiymati. Yuqoridagi tenglikdan quyidagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{a}{b} = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Bu tenglamani yechib, quyidagi ijobiy ildizga ega bo‘lamiz: $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Bu son oltin nisbat soni yoki φ (fi) deb ataladi.

Ushbu maqolada oltin nisbatning kelib chiqishi, matematik ta’rifi, geometrik talqini, Fibonachchi ketma-ketligi bilan bog‘liqligi, tabiat, san’at, arxitektura va musiqadagi qo‘llanilishi hamda ta’limiy ahamiyati batafsil yoritiladi.

Oltin nisbatning tarixiy kelib chiqishi: *Oltin nisbat* tushunchasi qadimgi Yunon matematiklariga ma’lum bo‘lgan. Evklid o‘zining «Negizlar» asarida kesmani o‘ta va o‘rta nisbatda bo‘lish haqida yozib qoldirgan. Keyinchalik bu nisbat arxitektura va san’atda keng qo‘llanila boshlangan. O‘rta asrlarda va Qayta tiklanish davrida *oltin nisbat* mutanosiblik ramzi sifatida qaralgan. Uning matematik jihatdan o‘rganilishi esa zamonaviy algebra va analiz rivoji bilan yanada chuqurlashgan.

Oltin nisbatning matematik ta’rifi: Agar butun kesmaning katta qismiga nisbati katta qismning kichik qismiga nisbatiga teng bo‘lsa, kesma oltin nisbatda bo‘lingan deyiladi.

$$\text{Formula: } (a + b) / a = a / b.$$

Bu munosabat kvadrat tenglamaga olib keladi va oltin nisbat sonining kelib chiqishini ta’minlaydi.

ADABIYOTLAR SHARHI

Musiqada matematik qonuniyatlarning namoyon bo‘lishi qadimdan olimlar va bastakorlar e’tiborini tortib kelgan. Ayniqsa, oltin nisbat ($\varphi \approx 1.618$) va Fibonachchi ketma-ketligi musiqiy shakl, ritm va kompozitsiya tuzilmasida uyg‘unlik yaratishda muhim omil sifatida qaraladi. Qadimgi yunon faylasufi Pifagor musiqiy intervallarni sonlar nisbatlari orqali tushuntirgan bo‘lsa, keyingi davrlarda bu g‘oya geometrik va algebraik munosabatlar bilan boyitildi. Oltin nisbatning estetik mukammallik bilan bog‘liqligi Leonardo da Vinchi davridan boshlab san’atda keng o‘rganilgan va bu tushuncha musiqa nazariyasiga ham kirib kelgan. XX asrda bir qator tadqiqotchilar mashhur bastakorlar — xususan, I.S. Bax, V.A. Motsart, L. Betxoven va B. Bartok asarlarida oltin nisbat strukturalarini aniqlagan. Bartok musiqasini tahlil qilgan E. Lendvay (Ernő Lendvai) kompozitsiyalarda Fibonachchi sonlari va φ nisbatiga asoslangan vaqt bo‘linishlari mavjudligini ilmiy asoslab bergan.

Shuningdek, ritmik modellashirishda Fibonachchi ketma-ketligi asosida tuzilgan zarb naqshlari musiqani tabiiy va muvozanatli eshittirishga xizmat qilishi aniqlangan. Zamonaviy matematik musiqashunoslikda bu ketma-ketliklar fraktal tuzilmalar, algoritmik kompozitsiya va kompyuter yordamida musiqa yaratishda faol qo‘llanilmoqda. Amerikalik olim R. Harkleroad o‘z tadqiqotlarida musiqiy shakllarning matematik modellarini ishlab chiqib, oltin nisbatning sonli proporsiya sifatida kompozitsiya barqarorligini ta’minlashini ko‘rsatgan. Shuningdek, zamonaviy

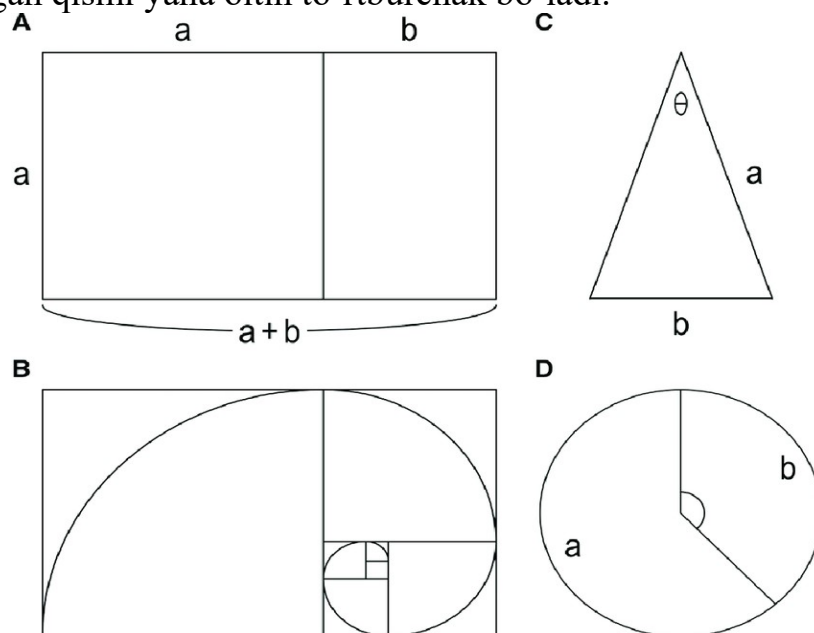
raqamli musiqada Fibonachchi asosidagi algoritmlar sun'iy intellekt kompozitsiyalarining muhim qismi bo'lib bormoqda.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Oltin nisbat soni φ va uning xossalari o'rganib chiqsak. Kvadrat tenglamani yechish orqali $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1.618$ soni hosil bo'ladi. Bu son irrasional bo'lib, chekli kasr ko'rinishiga ega emas.

Muhim xossalardan biri: $\varphi^2 = \varphi + 1$. Bu tenglik oltin nisbatning ko'plab geometric va algebraik xususiyatlarini tushuntirishga yordam beradi.

Oltin to'rtburchak va geometrik o'z-o'ziga o'xshashlik. Oltin to'rtburchak deb tomonlari nisbati φ ga teng bo'lgan to'rtburchakka aytiladi. Agar undan kvadrat ajratib olinsa, qolgan qismi yana oltin to'rtburchak bo'ladi.



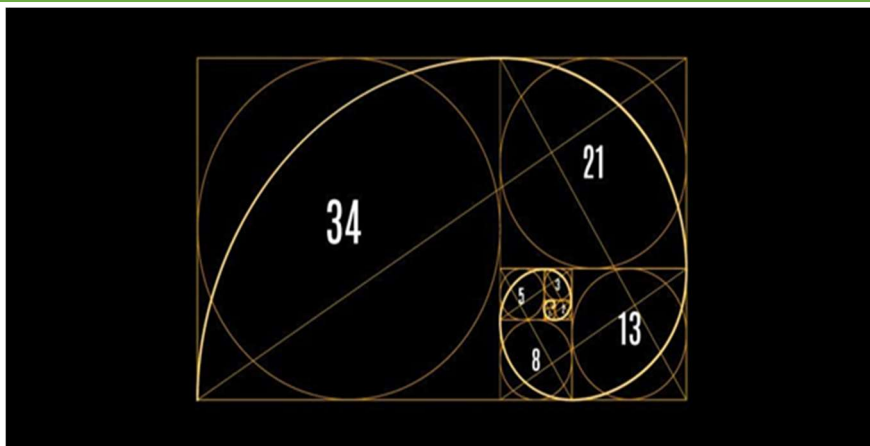
Agar to'rtburchak tomonlarining nisbati oltin nisbatga teng bo'lsa, u oltin to'rtburchak deb ataladi.

$$\frac{\text{uzun tomon}}{\text{qisqa tomon}} = \varphi$$

Muhim geometrik xossa: Oltin to'rtburchakdan kvadrat ajratib olinsa, qolgan to'rtburchak yana oltin to'rtburchak bo'ladi.

Bu xususiyat o'z-o'ziga o'xshashlik (self-similarity) deb ataladi va zamonaviy matematikada muhim tushunchadir.

Oltin spiral: Oltin to'rtburchaklar ketma-ket joylashtirilganda hosil bo'ladigan spiral oltin spiral deb ataladi. U logarifmik spiralga yaqin bo'lib, mutanosib o'sish jarayonlarini ifodalaydi. Bu spiral ko'plab tabiiy shakllarni matematik jihatdan tushuntirishda qo'llaniladi.



Fibonachchi ketma-ketligi va oltin nisbat: Fibonachchi ketma-ketligi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ko‘rinishida bo‘ladi. Har bir keying had oldingi ikki had yig‘indisiga teng.

Qo‘shni hadlar nisbati hadlar o‘sgan sari oltin nisbat soniga yaqinlashadi. Bu holat matematik analizdagi chekka qiymat tushunchasi bilan bog‘liq.

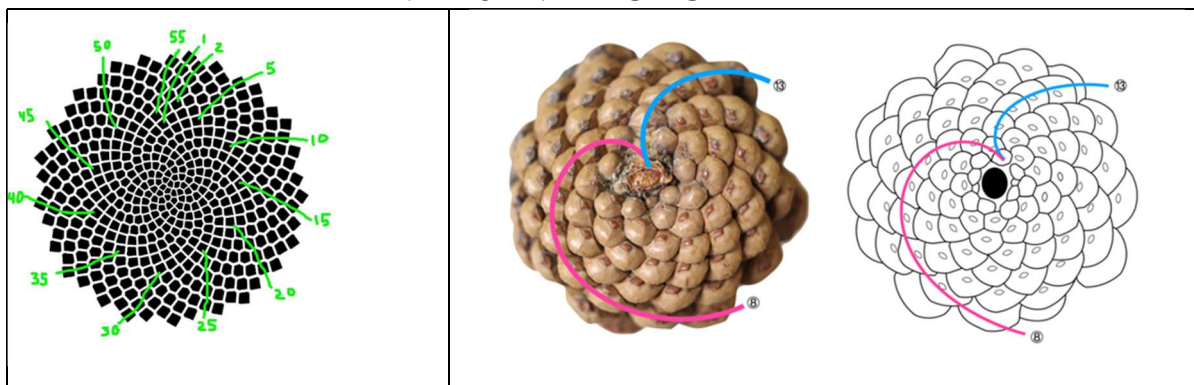
Fibonachchi ketma-ketligida quyidagi nisbat mavjud:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi \quad (n \rightarrow \infty)$$

Ya‘ni ketma-ketlik hadlari o‘sgan sari, qo‘shni hadlar nisbati oltin nisbat soniga yaqinlashadi.

Oltin nisbatning tabiatdagi ko‘rinishlari. Tabiatda oltin nisbat aniq emas, balki yaqin qiymatlarda namoyon bo‘ladi. Bu holat o‘sh jarayonlarining optimal tashkil etilgani bilan izohlanadi.

NATIJA VA MUHOKAMA



Kungaboqar urug‘lari va shishka joylashuvi. Bu qonuniyatlar o‘sh va resurslarni optimal taqsimlash bilan bog‘liq bo‘lib, oltin nisbat matematik model sifatida xizmat qiladi.

Oltin nisbat san‘at va arxitekturada: Oltin nisbat san‘at va arxitekturada proportsiya vositasi sifatida qo‘llaniladi. Fasadlar, rasm kompozitsiyasi va dizaynda mutanosiblik yaratishda undan foydalaniladi. Ilmiy nuqtai nazardan oltin nisbat qat‘iy qoida emas, balki estetik model sifatida qoraladi.

Oltin nisbat va musiqa: Musiqada oltin nisbat kompozitsiya tuzilishida

muayyan rol o'ynaydi. Asarning avji ko'p hollarda umumiy davomiylilikning oltin nisbatga yaqin qismida joylashgan bo'ladi. Bu holat musiqaning inson tomonidan uyg'un qabul qilinishiga yordam beradi.

1-masala (oltin nisbatni hisoblash — algebraik): Kesma ikki qismga oltin nisbatda bo'lingan. Agar kichik qismning uzunligi $b = 4$ sm bo'lsa, katta qism a ni toping.

Yechimi: Oltin nisbat ta'rifiga ko'ra: $\frac{a}{b} = \varphi$. Bu yerda $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Demak, $a = \varphi \cdot b \approx 1.618 \cdot 4 = 6.472$. Bundan ko'rinadiki, katta qismning uzunligi taxminan 6.47 sm.

Izoh: Bu masala oltin nisbatni to'g'ridan-to'g'ri qo'llashga asoslangan bo'lib, irratsional sonlar bilan amal bajarishni ko'rsatadi.

2-masala (musiqada oltin nisbat — matematik model): Musiqiy asarning umumiy davomiyligi 5 daqiqa. Oltin nisbat modeliga ko'ra, asarning avji (kulminatsiyasi) qaysi vaqtda joylashishi kerak?

Yechimi: Asarning umumiy vaqti: $T = 5$ daqiqa = 300 sekund.

Oltin nisbat modeli: $t^* \approx 0.618 \cdot T$.

Hisoblaymiz: $t^* \approx 0.618 \cdot 300 = 185.4$ sekund.

185 sekund ≈ 3 daqiqa 5 sekund. Demak, asarning avji taxminan 3 daqiqa 5 soniya atrofida joylashadi.

Izoh: Bu hisob musiqada oltin nisbat qat'iy qoida emas, balki kompozitsiyani tahlil qilish uchun qo'llaniladigan matematik model ekanini ko'rsatadi.

Musiqada oltin nisbat (matematik model va tahlil): Musiqiy asar tuzilishi vaqt bo'yicha rivojlanadigan tizim hisoblanadi. Shu sababli musiqani tahlil qilishda vaqtni matematik o'zgaruvchi sifatida qarash mumkin. Oltin nisbat musiqada qat'iy qoida emas, balki asar kompozitsiyasini tahlil qilish va tushuntirish uchun qo'llaniladigan matematik model sifatida qaraladi.

1. Vaqt asosidagi matematik modelini tuzsak: Musiqiy asarning umumiy davomiyligi $T > 0$ bo'lsin (sekund, daqiqa yoki taktlarda). Asar davomida musiqiy taranglik eng yuqori nuqtaga — kulminatsiyaga etadi. Ushbu nuqtani t^* deb belgilaymiz. Oltin nisbat modeliga ko'ra, kulminatsiya quyidagi munosabatga yaqin bo'ladi:

$$\frac{t^*}{T} \approx \frac{1}{\varphi} \approx 0.618.$$

Ya'ni, $t^* \approx 0.618T$.

Bu munosabat musiqada katta qism (tayyorgarlik) va kichik qism (yakun) o'rtasida mutanosiblik mavjudligini ifodalaydi.

2. Aniq hisoblash jarayonini kuzatsak: Agar musiqiy asarning umumiy davomiyligi $T = 6$ daqiqa bo'lsa, oltin nisbat modeliga ko'ra kulminatsiya vaqti:

$$t^* \approx 0.618 \cdot 6 \approx 3.708 \text{ daqiqa.}$$

Bu taxminan 3 daqiqa 42 soniyaga to'g'ri keladi.

Qat'iy izoh: Bu hisob musiqiy asarning real tuzilishini majburiy tarzda belgilab bermaydi, balki kompozitsiyadagi mutanosiblikni tahlil qilish uchun ishlatiladigan yaqinlashtiruvchi matematik sxemadir.

3. Musiqiy shaklni bo'limlarga ajratish modelini tuzamiz: Ko'plab musiqiy asarlar ikki asosiy qismdan iborat deb qaralishi mumkin, masalan

- asosiy rivojlanish qismi — A, yakunlovchi qismi — B. Asarning umumiy davomiyligi: $T = A + B$. Oltin nisbat modelida quyidagi munosabat qabul qilinadi:

$$\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B} = \varphi.$$

Bu holda: $A = \frac{T}{\varphi} \approx 0.618T$, $B = T - A \approx 0.382T$.

Matematik ma'nosini e'tibor qaratsak, Asarning katta qismi (rivojlanish) oldin joylashadi, qisqaroq qismi esa tabiiy ravishda yakun vazifasini bajaradi. Bu struktura inson idroki uchun qulay hisoblanadi.

4. Musiqiy idrok va nisbatning psixologik asosi: Matematik nuqtai nazardan, inson vaqt oralig'ini baholashda simmetrik bo'lmagan, lekin mutanosib bo'linmalarni oson qabul qiladi. Agar kul'minatsiya asarning aynan yarmida joylashsa ($0.5T$), asar dinamikasi sun'iy tuyulishi mumkin.

Oltin nisbat ($0.618T$) esa: asarga rivojlanish uchun etarli vaqt beradi, yakun qismini qisqa, lekin mazmunli saqlaydi. Bu holat musiqada oltin nisbatning idrokka mos keluvchi matematik modeli ekanini ko'rsatadi.

5. Qat'iy xulosa (musiqada) Musiqada oltin nisbat: universal qonun emas, har bir asarga majburiy tatbiq etilmaydi, ammo vaqt va shaklni tahlil qilish uchun qat'iy matematik model sifatida qo'llanilishi mumkin. Ushbu model musiqiy kompozitsiyani sonlar va nisbatlar orqali tahlil qilish imkonini beradi va matematika bilan san'at o'rtasidagi bog'liqlikni yaqqol namoyon etadi.

Musiqada oltin nisbat va Fibonachchi ritmlari: Musiqiy vaqtni faqat uzluksiz miqdor sifatida emas, balki diskret ritmik tuzilish sifatida ham qarash mumkin. Shu nuqtai nazardan, musiqada oltin nisbat g'oyasi Fibonachchi ketma-ketligi orqali yanada aniq matematik shaklga ega bo'ladi.

1. Ritmni matematik ketma-ketlik sifatida qarash- Ritm—bu vaqt intervallarining ketma-ketligi. Agar ritmik intervallar quyidagi qatorga muvofiq tanlansa: 1;1;2;3;5;8;13;... bunday tuzilish Fibonachchi ritmi deb ataladi. Matematik ma'nosiga e'tibor qaratsak, Fibonachchi ketma-ketligida qo'shni hadlar nisbati oltin nisbatga yaqinlashadi:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Shu sababli, ritmik intervallar Fibonachchi qonuniga muvofiq o'ssa, umumiy vaqt tuzilishi oltin nisbatga yaqin mutanosiblik hosil qiladi.

2. Fibonachchi ritmlari orqali kompozitsiya qurish modeli: Musiqiy asar

ma'lum taktlar sonidan iborat bo'lsin. Agar asarning bo'limlari quyidagi taktlar soni bilan tuzilsa: 8;13;21;34 bu sonlar Fibonachchi ketma-ketligiga tegishli. Asarning umumiy hajmi: $T = 8 + 13 + 21 + 34 = 76$ takt.

Asosiy bo'lim (rivojlanish) sifatida oxirgi ikki qismni olsak:

$$A = 21 + 34 = 55, B = 21.$$

Ularning nisbati:

$$\frac{A}{B} = \frac{55}{21} \approx 2.62, \quad \frac{T}{A} = \frac{76}{55} \approx 1.38.$$

Bu nisbatlar aniq φ ga teng emas, lekin yaqin qiymatlar hosil qiladi. Bu musiqada oltin nisbatning qat'iy emas, yaqinlashtiruvchi model sifatida ishlatilishini ko'rsatadi.

XULOSA

Ushbu tadqiqotda musiqiy kompozitsiyalarda uchraydigan mutanosiblik va ritmik uyg'unlikni tushuntirishda oltin nisbat va Fibonachchi ketma-ketligining matematik ahamiyati chuqur tahlil qilindi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, oltin nisbat musiqiy asarlarning tuzilishida uzluksiz vaqt modeli sifatida namoyon bo'lib, melodik rivojlanish, kulminatsion nuqtalar va kompozitsion muvozanatni belgilashda muhim rol o'ynaydi. U orqali musiqada tabiiy estetik uyg'unlik va eshituvchiga yoqimli bo'lgan nisbatlar shakllanadi.

Fibonachchi ritmlari esa musiqiy vaqtni diskret model sifatida ifodalab, zarblar oralig'i, taktlardagi bo'linishlar va ritmik strukturalarning tabiiy ketma-ketlik asosida shakllanishini tushuntirib beradi. Bu ketma-ketlik musiqiy harakatning bosqichma-bosqich rivojlanishini matematik qonuniyat asosida tashkil etib, ritmda barqarorlik va dinamik muvozanat hosil qiladi.

Oltin nisbat va Fibonachchi sonlarining o'zaro bog'liqligi ularning musiqadagi yagona matematik mexanizm sifatida ishlashini ko'rsatadi. Ular birgalikda kompozitsiyaning makoniy va vaqtli tuzilishini uyg'unlashtirib, musiqiy shaklning estetik jihatdan mukammal bo'lishini ta'minlovchi universal matematik modelni yuzaga keltiradi. Mazkur model nafaqat musiqiy tahlilda, balki zamonaviy kompozitsiya jarayonida ham ilmiy asoslangan vosita sifatida qo'llanilishi mumkin.

Shunday qilib, oltin nisbat uzluksizlikni, Fibonachchi ritmlari esa diskretlikni ifodalab, musiqada tartib va go'zallikning matematik qonuniyatlar asosida shakllanishini isbotlaydi. Bu esa san'at va matematika o'rtasidagi chuqur bog'liqlikni yana bir bor tasdiqlaydi hamda musiqani modellashtirishning yangi nazariy imkoniyatlarini ochib beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Algebra va analiz asoslari. 11-sinf uchun darslik. — Toshkent: O'qituvchi, 2021. —

320 b.

2.Geometriya. Umumta’lim maktablari uchun darslik. — Toshkent: O’qituvchi, 2020. — 256 b.

3.Matematika. Akademik litsey va kasb-hunar maktablari uchun o’quv qo’llanma. — Toshkent: Fan va texnologiya, 2019. — 280 b.

4.Evklid. Negizlar (Nachala). — M.: Nauka, 1989. — 448 s.

5.Fibonachchi L. Kniga abaka (Liber Abaci). — Per. s lat. — M.: Nauka, 1982. — 350 s.

6.Kleyn F. Elementarnaya matematika s tochki zreniya vysshey. — M.: Nauka, 1987. — 512 s.

7.Livio M. Zolotoe sechenie: istoriya chisla ϕ . — M.: AST, 2018. — 512 s.

8.Dunlap R. Zolotoe sechenie i Fibonachchi. — SPb.: Piter, 2016. — 304 s.

9.Knapp A. Numbers, Functions and Geometry. — Berlin: Springer, 2007. — 420 p.

10.Ksenakis Ya. Muzyka i arxitektura. — M.: Kompozitor, 2008. — 240 s.

11.Tofti L. Matematika i muzyka. — M.: Mir, 2005. — 312 s.

12.Hsu K., Hsu A. Self-similarity of music. — Scientific American. — 1991. — Vol. 264, No. 1. — P. 56–64.

13.Arnol’d V.I. Obychnennyye differentsial’nyye uravneniya. — M.: Nauka, 1984. — 272 s.

14.Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional’nogo analiza. — M.: Nauka, 1989. — 544 s.

15.Shannon K. Raboty po teorii informatsii i kibernetike. — M.: IL, 1963. — 832 s.

16.Moiseev N.N. Matematicheskie metody sistemnogo analiza. — M.: Nauka, 1998. — 400 s.

17.Stewart I. Concepts of Modern Mathematics. — New York: Dover, 2015. — 352 p.

18.Courant R., Robbins H. What Is Mathematics? — Oxford: Oxford Univ. Press, 1996. — 568 p.